E.N.S.I. de CHIMIE groupe NORD session 1987

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrices autorisées (circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986)
B.O. n° 34 du 2 octobre 1986

NOTATIONS

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$; n un entier naturel,

$x_0, x_1, \ldots x_n$ $(n + 1)$ réels distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$

Soit p un entier naturel, on désigne par $\mathcal{C}^p [a, b]$ l'ensemble des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, au moins p fois dérivables sur $[a, b]$ et dont la dérivée p.ième est continue sur $[a, b]$.

L désignant une matrice quelconque à coefficients réels, L^T désignera sa transposée.

$\mathcal{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

I

1) Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Soit (A_1) le problème :

- Trouver $P_n \in \mathcal{P}_n$ tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \ldots n$

- Démontrer que (A_1) admet une et une seule solution notée P_n et que P_n s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x)$$

avec $L_i(x) = \prod_{j, j=0, j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$

2) Soit $t \in \mathbb{R}$, $r = \{0,1,2 \ldots n\}$ démontrer, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(x - t)^r = \sum_{i=0}^{n} (x_i - t)^r\, L_i(x)$$

En déduire que :

pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, (x - x_i)^k = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots n,$$

Puis démontrer que :

pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, (x - x_i)^{n+1} = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

3) On suppose que $f \in \mathcal{C}^{n+1} [a, b]$

a) En utilisant une formule de Taylor, démontrer que pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(x) = Q_n(x) + \frac{1}{n!} \int_a^b \varphi_n(x,t)\, f^{(n+1)}(t)\,dt$$

avec . $Q_n \in \mathcal{P}_n$

. $\varphi_n : \begin{cases} [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \longrightarrow \begin{cases} (x-t)^n & \text{si } t \leqslant x \\ 0 & \text{si } t \geqslant x \end{cases} \end{cases}$

b) Posons $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ pour tout $x \in [a,b]$

Démontrer que :

$$E_n(x) = \int_a^b K_n(x,t)\, f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Tournez la page S. V. P.

E.N.S.I. de CHIMIE:Groupe Nord:P

avec :

$$K_n : \begin{cases} [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \longrightarrow \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} [\varphi_n(x,t) - \varphi_n(x_i,t)] \; L_i(x) \end{cases}$$

En déduire que :

$$E_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n!} \left(\int_{x_i}^{x} (x_i - t)^n f^{(n+1)}(t)dt \right) L_i(x)$$

4) Soient $n = 1$, $x_o < x_1$ et $x \in]x_0, x_1[$.

Ecrire $K_1(x,t)$, en déduire qu'il existe $z_x \in]x_0, x_1[$

tel que : $E_1(x) = f''(z_x) \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)}{2}$

5) Soit $h \in \mathcal{C}^0[a, b]$ et (A_2) le problème :

Trouver $u \in \mathcal{C}^2[a, b]$ tel que $\begin{cases} u''(x) = h(x) \text{ pour tout } x \in]a, b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

En utilisant le 3), démontrer que l'application :

$$u : \begin{cases} [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \int_a^b K_1(x,t)h(t)dt \end{cases}$$

est solution de (A_2).

Trouver toutes les solutions de (A_2).

II

On désignera par $\mathcal{T}_n$ l'espace vectoriel des applications t_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe (n+1) réels $a_0, a_1 \ldots, a_n$ et que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on ait :

$$t_n(\theta) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$$

1) Soit $r_n \in \mathcal{T}_n$, démontrer que l'application : $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \theta \to r_n(\cos\theta) \end{cases}$

est dans $\mathcal{T}_n$.

On définit alors α l'application de $\mathcal{T}_n$ dans $\mathcal{T}_n$ par si $r_n \in \mathcal{T}_n$,

$$\alpha(r_n) = \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \theta \to r_n(\cos\theta) \end{cases}$$

Démontrer que α est un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{T}_n$.

2) On suppose dorénavant que :

$f \in \mathcal{C}^{n+1}[-1,+1]$ et $x_i = \cos\theta_i$,

avec $\theta_i = \dfrac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}$ pour $i = 0, 1, \ldots n$

Soit (A_3) le problème :

Trouver $T_n \in \mathcal{T}_n$ tel que $T_n(\theta_i) = f(\cos\theta_i)$ pour $i = 0, 1 \ldots n$

a) Démontrer que (A_3) a une et une seule solution, notée T_n.

b) T_n s'écrivant $T_n(\theta) = \dfrac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$

Démontrer que $a = (a_0, a_1 \ldots, a_n)^T$ est l'unique solution d'un système linéaire $La = b$ avec :

$$b = [f(\cos\theta_0), f(\cos\theta_1), \ldots f(\cos\theta_n)]^T$$

Ecrire la matrice L, calculer L^TL, en déduire a, et l'écriture de T_n solution de (A_3).

• • •
•

page 130 E.N.S.I. de CHIMIE:Groupe Nord:P 1987